Article from
Risk Management
September 2019
Issue 45

Estimation de la VaR des actions fondée sur des ondelettes

Par Kailan Shang

Note de l'éditeur : Le présent article est adapté d'un article de recherche intitulé Estimation de la VaR des actions fondée sur des ondelettes, *dans le cadre de l'appel de documents lancé en prévision du Symposium 2019 sur la gestion du risque d'entreprise. Il a reçu le prix d'excellence en recherche sur la GRE de la Fondation actuarielle, à la mémoire de Hubert Mueller, pour le meilleur article dans son ensemble. La version intégrale du rapport est disponible à l'adresse* www.ermsymposium.org/wp-content/uploads/2019/05/Shang_Actuarial-Foundation-Prizewinner.pdf.

Le risque économique est un risque important pour les assureurs qui offrent des produits à long terme assortis de prestations garanties. Pour estimer l'ampleur du risque économique, on utilise habituellement des données historiques. Toutefois, selon une hypothèse implicite de cette méthode, le risque ne varie pas dans le temps. En réalité, la volatilité du marché boursier varie selon le temps. Elle est causée soit par des cycles économiques, soit par des changements structurels de l'économie. La figure 1 montre la volatilité annualisée à l'aide du rendement quotidien de l'indice S&P 500, de 1990 à 2017. En supposant une volatilité ne variant pas (constante) dans le temps, la volatilité annualisée est de 17,7 %. Si la volatilité annualisée est calculée sur une base annuelle, elle pourrait dépasser 40 %, comme en témoigne la crise financière de 2008.

Une autre complication réside dans la fréquence des données historiques à utiliser. La volatilité annualisée calculée d'après différentes fréquences varie beaucoup. Le tableau 1 présente la volatilité annualisée et la valeur empirique à risque (VaR) du rendement de l'indice boursier S&P 500 à l'aide de données quotidiennes, mensuelles et annuelles, de 1990 à 2017. Par souci de simplicité, le calcul suppose que la volatilité et la VaR ne varient pas dans le temps et que l'indice boursier suit un mouvement brownien géométrique. Dans le présent document, la VaR mesure la valeur de rendement négative dans l'extrémité gauche de la courbe. Par exemple, une VaR de 15 % avec 99,5 % de probabilité signifie qu'il existe une probabilité de 0,5 % que le rendement sera inférieur à -15 %. C'est le contraire de la valeur de rendement négative dans l'extrémité gauche.

Les rendements historiques des indices boursiers présentent différents niveaux de risque selon la fréquence. La VaR empirique annualisée fondée sur des données de haute fréquence (quotidienne et mensuelle) est plus élevée que la VaR fondée sur des données de faible fréquence (trimestrielle et annuelle). Ce phénomène indique la nécessité d'analyser le risque économique à différentes fréquences pour obtenir une vue d'ensemble.

MODÈLE DE SÉRIES CHRONOLOGIQUES

Les modèles de séries chronologiques, comme l'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive généralisée (GARCH) et la moyenne mobile autorégressive (ARMA), peuvent être utilisés pour saisir la caractéristique de variation temporelle de la volatilité des actions. Un modèle ARMA-GARCH est utilisé

Figure 1
Volatilité annualisée du rendement de l'indice S&P 500 (1990–2017)

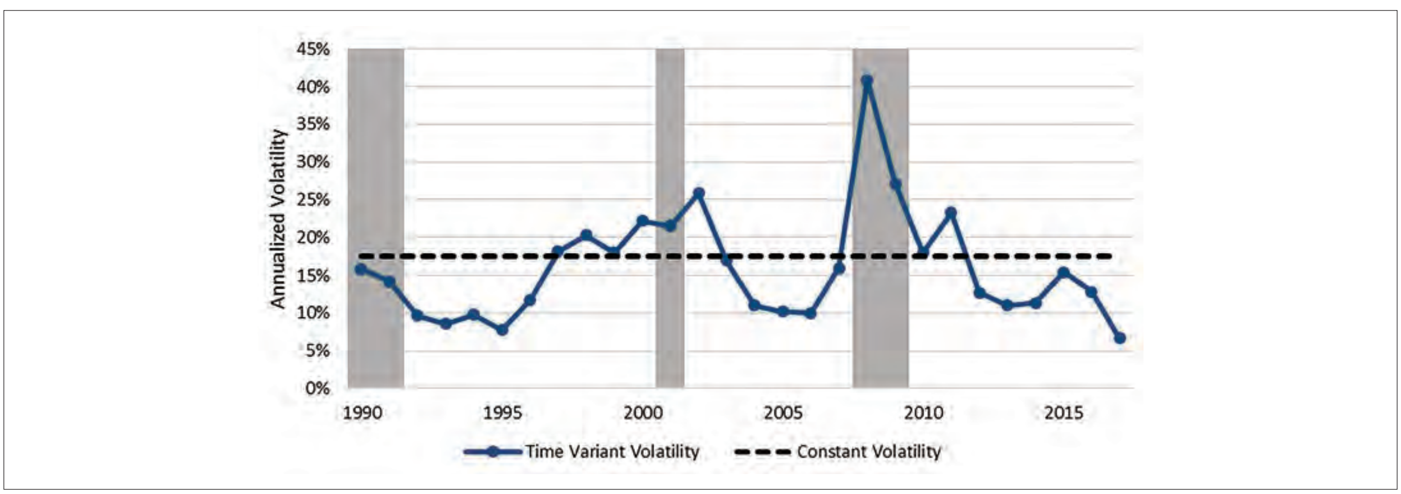


Table 1
Volatilité du rendement de l'indice S&P 500 et VaR selon la fréquence

Fréquence	Volatilité constante	Volatilité annualisée[1]	VaR empirique de 99,5 %	VaR empirique annualisée[2]
Quotidienne	1,1 %	17,5 %	3,9 %	69,3 %
Mensuelle	4,2 %	14,5 %	19,3 %	75,3 %
Trimestrielle[3]	7,9 %	15,5 %	26,9 %	64,2 %
Annuelle	17,7 %	17,5 %	43,5 %	43,5 %

[1] Volatilité annualisée = Volatilité constante $\sqrt{n}$, où n équivaut à 250/12/4/1 pour la fréquence quotidienne/mensuelle/trimestrielle/annuelle.
[2] VaR empirique annualisée = (VaR empirique de 99,5 % – Rendement moyen) $\sqrt{n}$ – Rendement moyen x n.
[3] La valeur minimale du rendement trimestriel et annuel est utilisée pour la VaR empirique de 0,5 % parce que le nombre de points de données est inférieur à 200.

pour analyser les rendements quotidiens historiques de l'indice S&P 500.

$$ARMA(p,q) \sim r_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j},$$
$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t,$$
$$GARCH(p,q) \sim \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

où

r_t = rendement quotidien de l'indice S&P 500. Il est calculé ainsi :
$$log\left(S_t / S_{t-1}\right).$$
z_t = i.i.d. avec moyenne zéro et variance unitaire.

Il convient de choisir la distribution de z_t qui peut capter avec plus de souplesse l'asymétrie et les extrémités épaisses. Dans cet exemple, z_t est présumé suivre la distribution asymétrique des erreurs généralisées (SGED). Il présente la fonction de densité de probabilité suivante :

$$f_{SGED}(x;\mu,\sigma,\lambda,p) = \frac{pe^{-\left\{\frac{|x-\mu+m|}{v\sigma\left[1+\lambda sign(x-\mu+m)\right]}\right\}^{p}}}{2v\sigma\Gamma(1/p)},$$

où

μ = paramètre de position. Il est zéro pour z_t,

σ = paramètre d'échelle. Il est un pour z_t,

λ = paramètre d'asymétrie,

p = paramètre de forme,

$$m = \frac{2^{\frac{2}{p}} v\sigma\lambda\Gamma\left(0.5 + \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

si la volatilité de la variable est égale à μ,

$$v = \sqrt{\frac{\pi\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\pi\left(1+3\lambda^2\right)\Gamma\left(\frac{3}{p}\right) - 16^{\frac{1}{p}}\lambda^2\Gamma\left(0.5+\frac{1}{p}\right)^2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}}$$

si la volatilité de la variable x est égale à σ.

ARMA(3,3) et GARCH(2,2) avec la SGED sont utilisés pour analyser les rendements historiques quotidiens de l'indice S&P 500 de 1990 à 2017. Les ordres (p et q) sont choisis en fonction du critère d'information d'Akaike (CIA).

La figure 2 montre le rendement quotidien et la volatilité conditionnelle σ_t d'après le modèle ARMA–GARCH. La volatilité conditionnelle varie sensiblement, la valeur la plus élevée ayant été observée pendant la crise financière de 2008.

Avec le modèle ajusté, on peut prévoir la VaR quotidienne future. La figure 3 présente les résultats fondés sur 1 000 simulations pour 251 jours de négociation, d'octobre 2017 à septembre 2018. Les rendements quotidiens réels sont comparés aux fourchettes prévues. Bien que 10,4 % des rendements réels se situent dans la fourchette du milieu de 90 % (du 5e au 95e centile), 1,6 % des rendements réels se situent dans la fourchette du milieu de 99 % (du 0,5e au 99,5e centile). Même si la SGED produit une meilleure prévision de fourchette que la distribution normale, elle sous-estime quand même la probabilité de rendements extrêmes pour la période de projection.

Figure 2
Rendement quotidien et volatilité conditionnelle de l'indice S&P 500

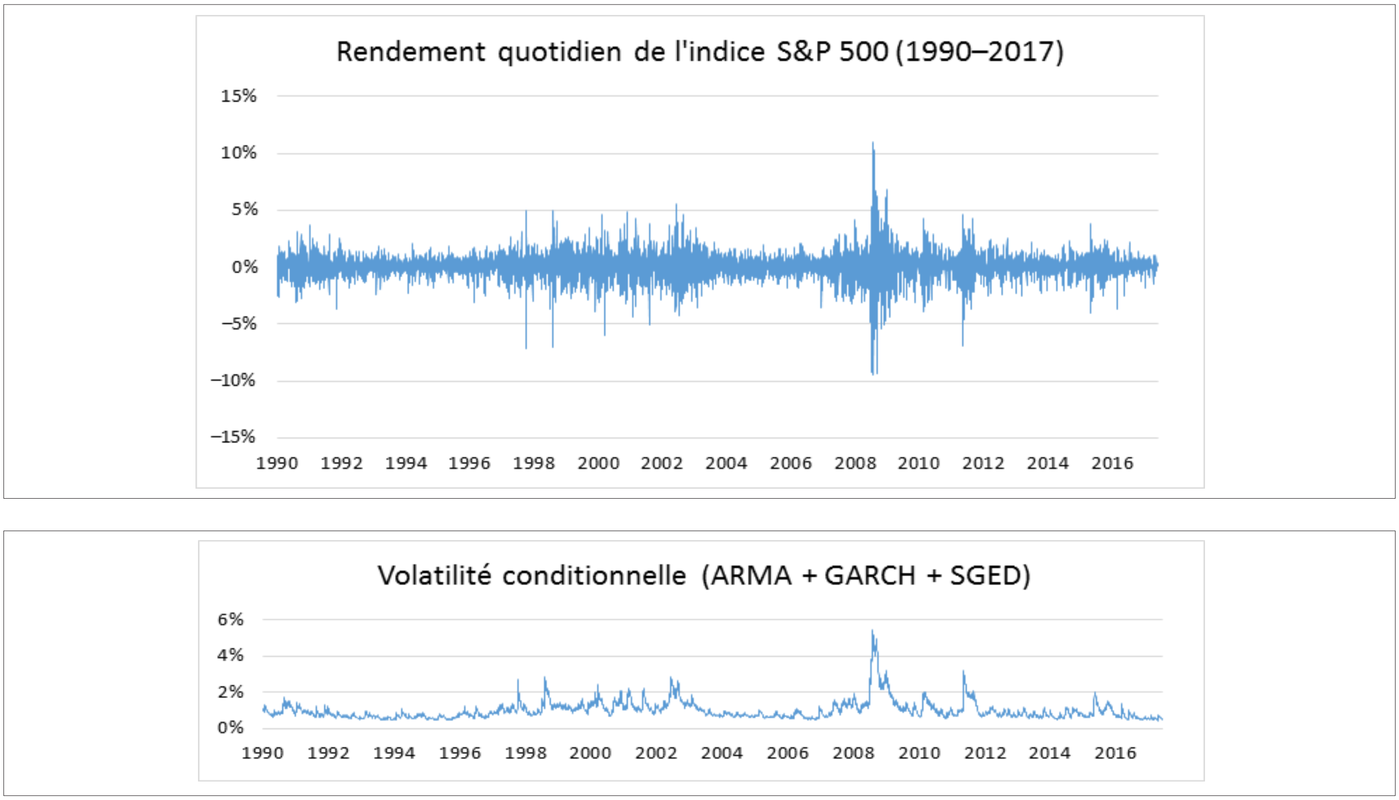
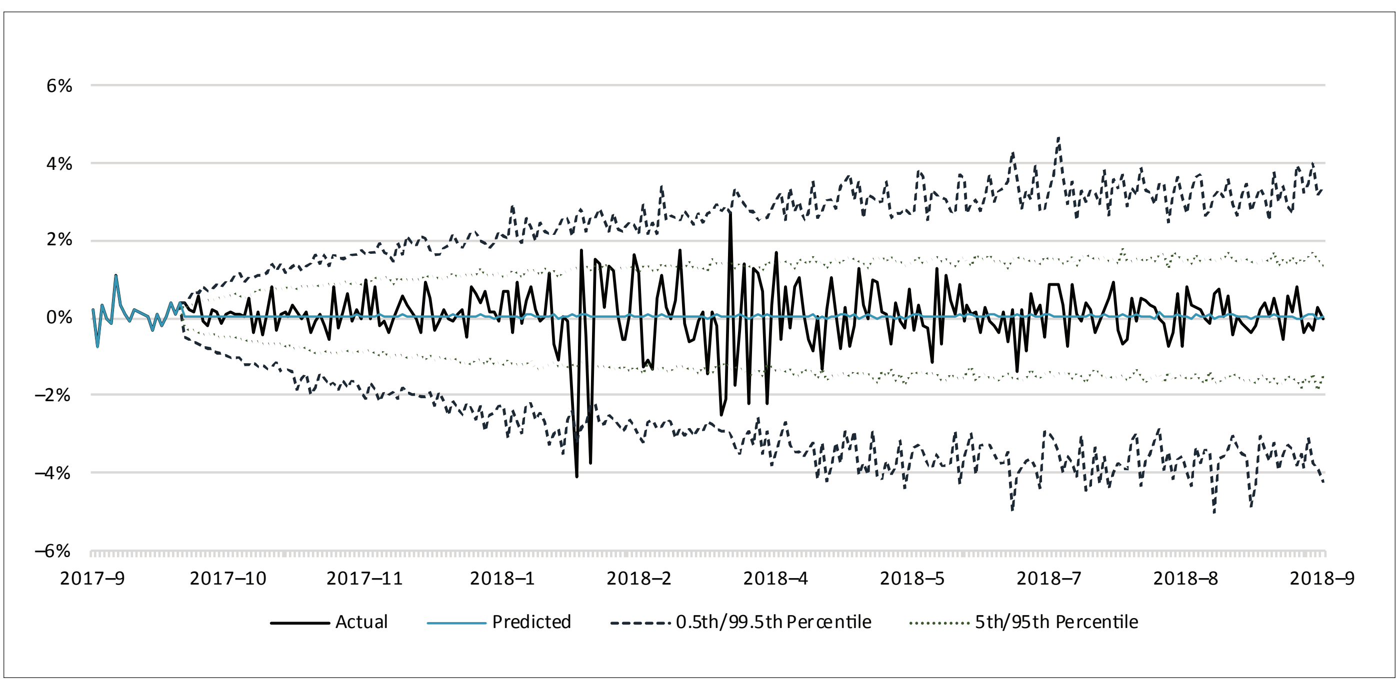


Figure 3
Estimation de la fourchette de rendements quotidiens de l'indice S&P 500



Plutôt que d'utiliser des formules à forme fermée, la VaR annuelle peut être estimée à partir de rendements quotidiens simulés, comme l'indique le tableau 2. Dans cet exemple, la SGED a une extrémité gauche plus épaisse que la distribution normale.

Table 2
Estimation de la VaR annuelle du rendement de l'indice S&P 500

	VaR 95 %	VaR 99,5 %
SGED	4,6 %	24,2 %
Distribution normale	5,0 %	14,1 %

ANALYSE DES ONDELETTES

Si l'évolution du risque dépend de quelques forces à fréquences différentes, il se peut qu'un modèle de série chronologique pure ne puisse saisir toutes les différentes tendances. Lorsque l'on prévoit le rendement et la volatilité conditionnelle, le modèle ARMA-GARCH ne tient compte que de l'impact direct des rendements et des volatilités des trois derniers jours. Le modèle ne peut saisir efficacement les répercussions des tendances à moyen et à long terme. On peut faire valoir que des données moins fréquentes (notamment annuelles) peuvent être utilisées pour estimer la VaR annuelle. Toutefois, les données historiques ne suffisent pas à produire une estimation crédible, et des renseignements précieux dans les données de haute fréquence sont perdus.

L'analyse par ondelettes peut servir à analyser simultanément les données historiques de deux dimensions (temps et fréquence). Elle peut être considérée comme une combinaison d'analyse de série chronologique et de transformation de Fourier. La transformation de Fourier permet d'analyser les données uniquement à partir de la dimension de la fréquence, en supposant que les tendances sont constantes dans le temps. Comme le montre la figure 4, l'analyse par ondelettes permet de conserver davantage de renseignements sur le temps pour les données de haute fréquence et moins de renseignements sur le temps pour les données de basse fréquence.

La transformée en ondelettes discrète à chevauchement maximal (MODWT) est utilisée pour illustrer l'analyse des risques accrus fondée sur des ondelettes. La MODWT est choisie plutôt que plusieurs autres ondelettes parce que sa décomposition à différentes échelles peut facilement être comparée à des séries chronologiques initiales. La MODWT est également moins sensible que les autres transformées en ondelettes au point de départ d'une série chronologique. Cela aide à comprendre les tendances à différentes fréquences : à court, à moyen ou à long terme. Selon la définition de Percival et Walden (2000), la MODWT d'une série chronologique $X_t,\ t = 1,2,\ldots,N$ au n[e] niveau j fonctionne comme suit :

Coefficient d'ondelettes $$\tilde{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{h}_{j,l} X_{t-l \text{ MOD } N},$$

Coefficient d'échelle $$\tilde{V}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{g}_{j,l} X_{t-l \text{ MOD } N},$$

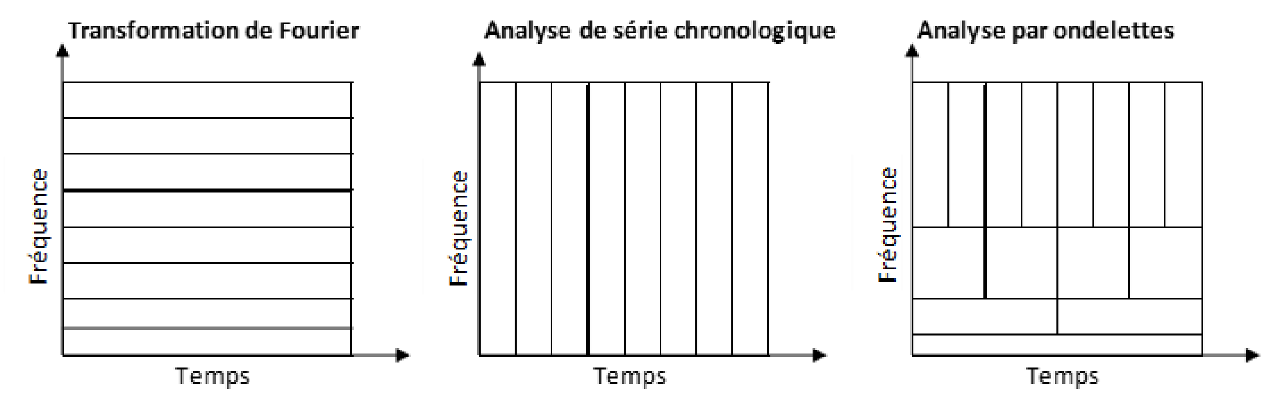
où $\tilde{h}_{j,l}$ = filtre d'ondelettes construit en mariant les filtres j composés de $\tilde{g}_l$ et de $\tilde{h}_l$. qui remplit les conditions suivantes :

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l = 0 \quad \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l^2 = \frac{1}{2} \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_l \tilde{h}_{l+2n} = 0 \text{ for all integers } n > 0,$$

$\tilde{g}_{j,l}$ = filtre d'échelle construit en mariant les filtres j composés de $\tilde{g}_l$ qui remplit les conditions suivantes :

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l = 1 \quad \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l^2 = \frac{1}{2} \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_l \tilde{g}_{l+2n} = 0 \text{ for all integers } n > 0,$$

Figure 4
Concept de l'analyse par ondelettes



$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_l \tilde{h}_{l+2n} = 0 \text{ for all integers } n,$$

$L_j = (2^j - 1)(L-1) + 1$. L est la largeur du filtre de base.

Le nombre maximal de niveaux dépend des points de données disponibles. Le tableau 3 indique la fréquence des huit premiers niveaux.

Table 3
Fréquence des niveaux de décomposition

Niveau (j)	Fréquence	Échelle (1/fréquence)*
1	[1/4,1/2]	2 à 4 jours
2	[1/8,1/4]	4 à 8 jours
3	[1/16,1/8]	8 à 16 jours
4	[1/32,1/16]	16 à 32 jours
5	[1/64,1/32]	32 à 64 jours
6	[1/128,1/64]	64 à 128 jours
7	[1/256,1/128]	128 à 256 jours
8	[1/512,1/256]	256 à 512 jours

* L'échelle est mesurée en jours ouvrables.

Pour analyser le risque lié aux actions, LA(8) (filtre le moins asymétrique de Daubechies avec L = 8) est utilisé pour définir $\tilde{h}_{j,l}$ and $\tilde{g}_{j,l}$. La figure 5 montre les filtres d'ondelettes $\tilde{h}_{j,l}$ et les filtres d'échelle $\tilde{g}_{j,l}$ pour les trois premiers niveaux. L'ondelette est réduite à mesure que la largeur s'accroît et que le niveau augmente. La même tendance s'applique lorsque le niveau dépasse le niveau 3.

La série chronologique initiale (rendement quotidien de l'indice S&P 500) est décomposée en huit niveaux. La figure 6 montre les coefficients d'ondelettes ($\tilde{W}_{j,t}$) pour les huit niveaux et les coefficients d'échelle ($\tilde{V}_{j,t}$) pour le huitième niveau. Les coefficients d'ondelette sont plus lisses à un niveau plus élevé et ils représentent la volatilité à plus long terme. Les coefficients d'échelle au plus haut niveau représentent la volatilité qui n'est pas expliquée par les coefficients d'ondelettes.

ANALYSE DU RISQUE CONSTANT DANS LE TEMPS

L'analyse par ondelettes peut être utilisée pour attribuer la volatilité totale à des niveaux différents. La variance totale peut représenter la somme des variances à chaque niveau :

Figure 5
Filtres d'ondelettes et échelle LA(8) pour la MODWT

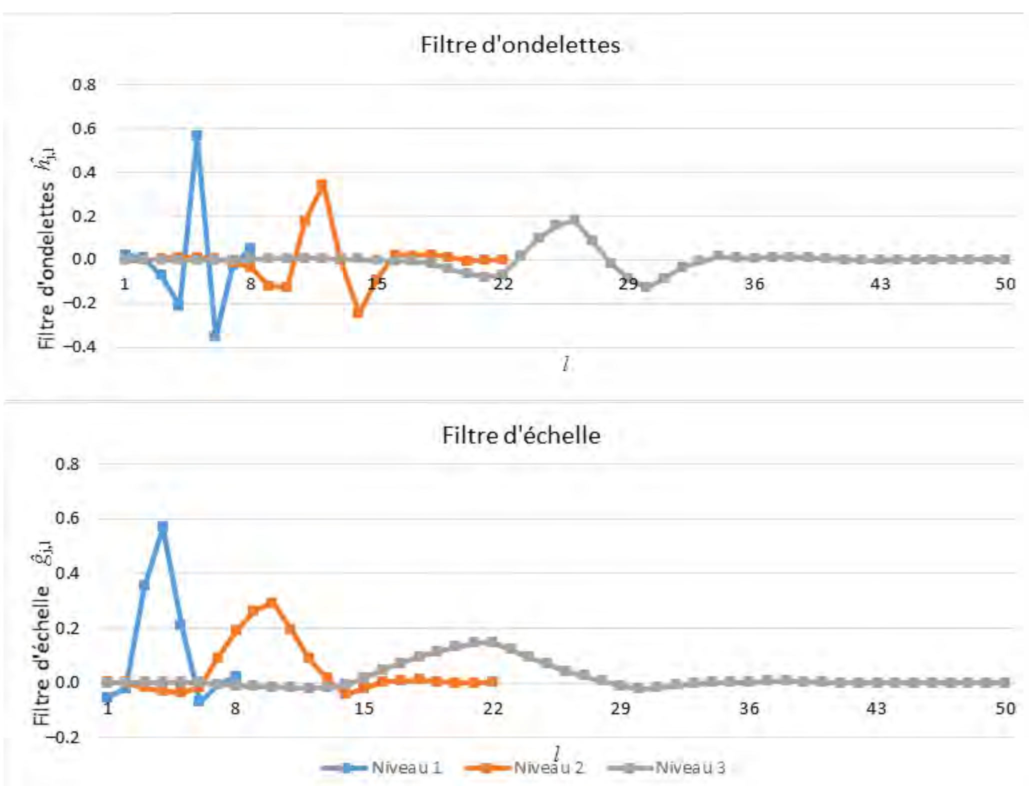
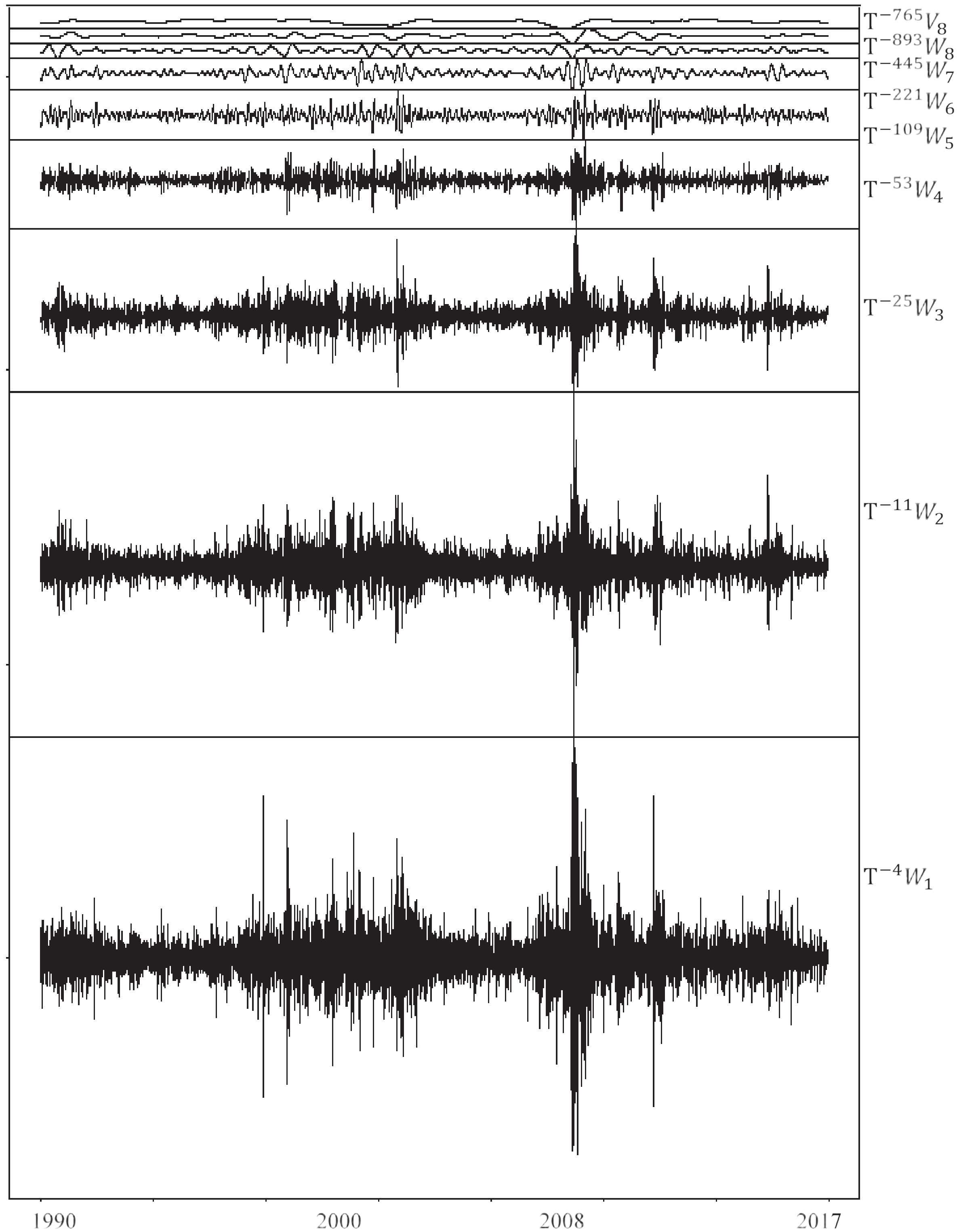


Figure 6
Les coefficients d'ondelettes et les coefficients d'échelle de la MODWT



Note: T^{-i} signifie que la série des coefficients est reculée de i positions de sorte que toutes les séries portent sur une même période. .

$$\sigma_X^2 = \sum_{j=1}^{J_M} \sigma_X^2(j),$$

où

σ_X^2 = variance totale de la série chronologique initiale,

$\sigma_X^2(j)$ = variance de la décomposition au niveau j,

J_M = nombre de niveaux utilisés dans l'analyse des ondelettes.

En outre, $\sigma_X^2(j)$ comporte un estimateur sans biais :

$$\hat{\sigma}_X^2(j) = \frac{1}{M_j} \sum_{t=L_j-1}^{N-1} \tilde{W}_{j,t}^2,$$

où

$M_j = N - L_j + 1.$

Une estimation de l'asymétrie et de l'aplatissement de chaque niveau peut également être établie :

Asymétre $$\hat{S}_X(j) = \frac{\frac{1}{M_j}\sum_{t=L_j-1}^{N-1} \tilde{W}_{j,t}^3}{\hat{\sigma}_X^3(j)},$$

Aplatissement $$\hat{K}_X(j) = \frac{\frac{1}{M_j}\sum_{t=L_j-1}^{N-1} \tilde{W}_{j,t}^4}{\hat{\sigma}_X^4(j)}.$$

Le tableau 4 indique la moyenne, la variance, l'asymétrie et l'aplatissement pour chaque niveau de décomposition et la série chronologique initiale. Les faibles niveaux (haute fréquence/court terme) contribuent à la plus grande partie de la variance de la série initiale de rendements. L'asymétrie et l'aplatissement sont très différents entre les huit niveaux, ce qui indique que les tendances à des fréquences différentes sont différentes et qu'il pourrait être avantageux de les modéliser séparément.

Une approximation de la VaR empirique de la série chronologique initiale peut être établie en groupant la VaR à chaque niveau de décomposition comme suit :

$$VaR_{Agg} = \sqrt{\sum_{j=1}^{J_M} VaR_j^2},$$

où

VaR_{Agg} = VaR groupée,

VaR_j = VaR au niveau j.

Dans cet exemple, la VaR empirique groupée est de 3,94 % par rapport à 3,93 % lorsqu'elle est calculée directement à partir de la série chronologique initiale. La non-normalité de la série chronologique initiale est bien protégée par les coefficients d'ondelette dans cet exemple.

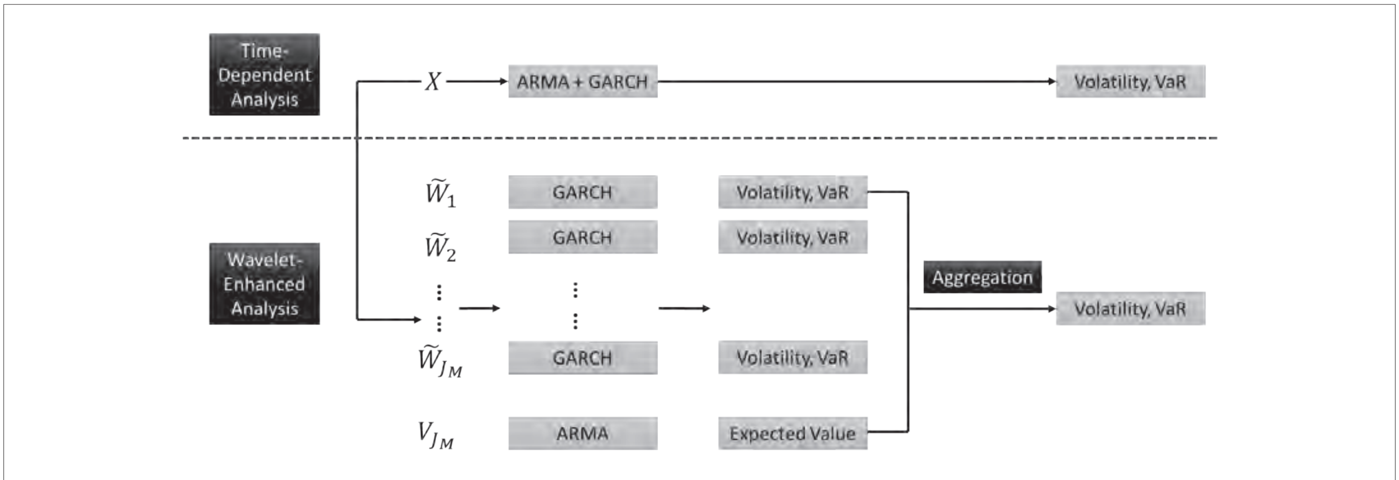
ANALYSE DES RISQUES VARIANT DANS LE TEMPS

L'analyse des ondelettes dans la section précédente suppose une volatilité constante. L'analyse des risques variant dans le temps peut être améliorée au moyen de l'analyse des ondelettes et pour tenir compte des différents modèles à chaque niveau de décomposition des ondelettes. Cette section s'appuie sur l'exemple ARMA-GARCH pour inclure l'analyse à chaque niveau de décomposition. Comme le montre la figure 7, plutôt que de modéliser la série chronologique initiale à l'aide d'un modèle, l'analyse temporelle améliorée par ondelettes étudie séparément les coefficients d'ondelettes à chaque niveau pour comprendre le risque dans différentes fourchettes de fréquence. Les coefficients d'ondelettes sont ajustés à un modèle GARCH pour obtenir l'information sur la volatilité et la VaR. Les coefficients d'échelle au niveau le plus élevé sont ajustés aux

Tableau 4
Statistiques descriptives à différents niveaux de décomposition

	Moyenne	Volatilité	Contribution de la variance	Asymétrie	Aplatissement	VaR empirique de 99,5 %	VaR (normale) de 99,5 %
Niveau 1	0,0000 %	0,8 %	53,5 %	0,3	12,7	3,0 %	2,1 %
Niveau 2	0,0000 %	0,6 %	24,9 %	0,2	11,3	2,0 %	1,4 %
Niveau 3	0,0001 %	0,4 %	12,3 %	0,1	7,6	1,2 %	1,0 %
Niveau 4	0,0000 %	0,2 %	5,0 %	0,1	6,3	0,9 %	0,6 %
Niveau 5	0,0001 %	0,2 %	2,3 %	0,1	5,5	0,5 %	0,4 %
Niveau 6	0,0002 %	0,1 %	1,2 %	0,03	5,2	0,4 %	0,3 %
Niveau 7	0,0001 %	0,1 %	0,4 %	0,2	3,7	0,2 %	0,2 %
Niveau 8	0,0001 %	0,1 %	0,3 %	0,3	6,4	0,2 %	0,2 %
Initial	0,0274 %	1,1 %	—	0,2	11,9	3,93 %	2,84 %

Figure 7
Structure d'analyse temporelle améliorée par ondelettes



modèles ARMA et GARCH pour comprendre la tendance des séries chronologiques. Ils sont groupés pour obtenir le rendement prévu, la volatilité totale et la VaR.

Conformément à la méthode de simulation utilisée dans le modèle des séries chronologiques pour simuler les rendements futurs des actions, des coefficients d'ondelettes peuvent être simulés à chaque niveau de décomposition. La volatilité conditionnelle et la VaR peuvent être projetées pour chaque niveau selon le modèle GARCH étalonné. Elles peuvent être groupées pour prévoir la VaR totale :

$$VaR_{Agg,T+l} = \sqrt{\sum_{j=1}^{J_M} VaR_{j,T+l}^2} - \mathbb{E}(r_{T+l}),$$
$$VaR_{j,T+l} = -\sigma_{j,T+l} SGED_j^{-1}(1-p),$$

où

$VaR_{Agg,T+l}$ = quotidienne groupée à VaR at $T + l$, l périodes avant T,

$VaR_{j,T+l}$ = VaR quotidienne à $T + l$ au niveau de décomposition j. La valeur attendue des coefficients des ondelettes est zéro et elle n'est donc pas incluse dans la formule,

$\sigma_{j,T+l}$ = volatilité conditionnelle projetée des coefficients d'ondelette du niveau j à $T + l$,

$SGED_j^{-1}(1-p)$ = le $[100 \times (1 - p)]^e$ centile de la SGED ajustée pour les coefficients d'ondelette de niveau j.

La figure 8 montre la prévision de la fourchette de rendements quotidiens fondée sur 1 000 simulations pour 250 jours de négociation à compter du début d'octobre 2017. Les rendements

L'analyse des risques variant dans le temps peut être améliorée au moyen de l'analyse des ondelettes et pour tenir compte des différents modèles à chaque niveau de décomposition des ondelettes.

quotidiens réels jusqu'en septembre 2018 sont comparés aux fourchettes projetées. Bien que 10,2 % des rendements réels se situent dans la fourchette du milieu de 90 % (du 5e au 95e centile), 0,7 % des rendements réels se situent dans la fourchette du milieu de 99 % (du 0,5e au 99,5e centile). Par rapport à une prévision purement temporelle, comme dans la figure 3, la prévision améliorée par les ondelettes comporte une fourchette prévue plus large pour les rendements extrêmes (0,5e centile et 99,5e centile).

Pour les décideurs à plus long terme, la VaR annuelle est une meilleure mesure que la VaR quotidienne aux fins de l'évaluation des risques. L'analyse multirésolution (MRA) fondée sur la MODWT peut être utilisée pour construire les rendements quotidiens à partir des coefficients transformés qui préservent l'autocorrélation des rendements quotidiens. Les rendements annuels sont ensuite calculés en fonction des rendements quotidiens simulés. Le tableau 5 compare la VaR annuelle calculée selon différentes méthodes pour la période comprise entre octobre 2017 et septembre 2018. L'analyse temporelle améliorée par ondelettes fournit une VaR annuelle beaucoup plus élevée qu'une analyse temporelle pure, compte tenu de la

Figure 8
Estimation de la fourchette de rendements quotidiens de l’indice S&P 500 fondée sur des ondelettes

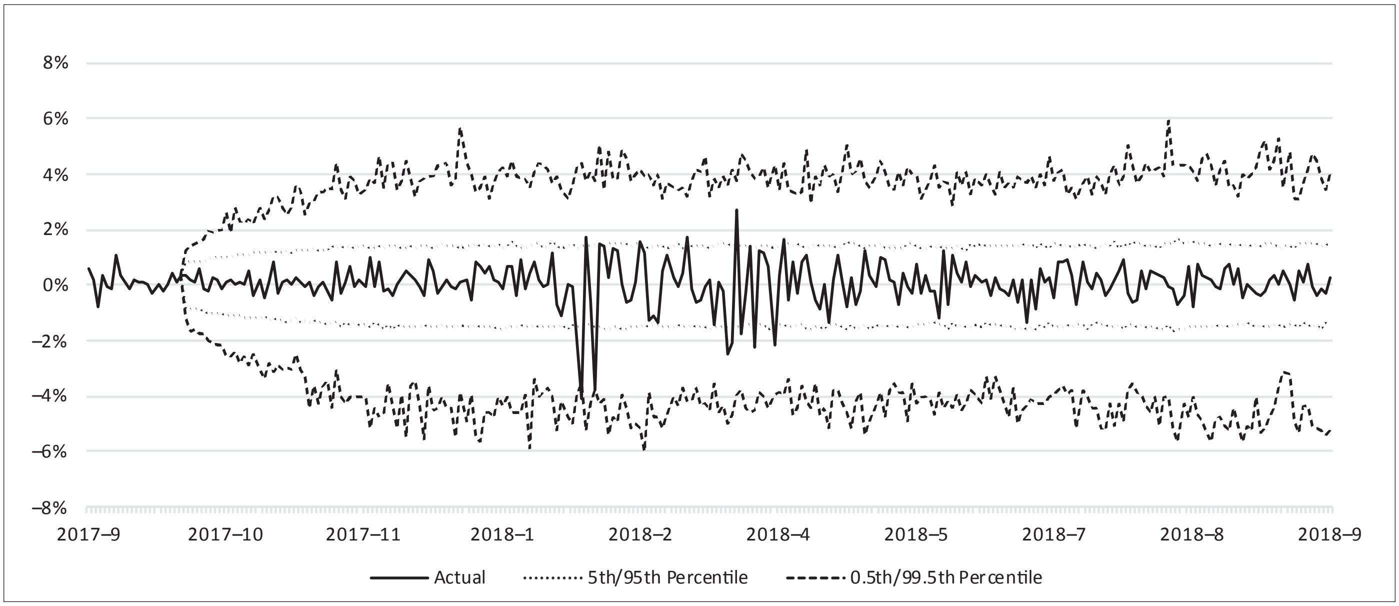


Tableau 5
Estimation de la VaR annuelle du rendement de l’indice S&P 500

	Type de projection	Modèle	VaR 95 %	VaR 99,5 %
Analyse temporelle	Conditionnelle	ARMA + GARCH	4,6 %	24,2 %
Analyse temporelle améliorée par ondelettes	Conditionnelle	MODWT + MRA	17,6 %	39,9 %
Analyse empirique (janv. 1990 – sept. 2017)	Inconditionnelle	Analyse statistique	26,9 %	43,5 %

faible volatilité observée en septembre 2017. L’analyse par ondelettes a une mémoire plus longue et aide à préserver le modèle à long terme bien mieux que l’analyse temporelle dans cet exemple. L’analyse temporelle améliorée par ondelettes tient également compte des conditions actuelles du marché pour prévoir le risque futur à un horizon temporel donné.

Pour l’estimation de la VaR à un niveau de confiance élevé, l’analyse temporelle améliorée par ondelettes est la meilleure option d’après les résultats du contrôle ex post. De plus, ce type d’analyse peut s’ajuster en temps opportun en fonction de nouveaux renseignements.

CONCLUSION

Contrairement à l’analyse des séries chronologiques, l’analyse par ondelettes peut servir à analyser systématiquement et simultanément les données des séries chronologiques historiques en fonction du temps et de la fréquence. L’analyse par ondelettes fournit une décomposition du risque total et permet de déterminer si le risque à court, à moyen ou à long terme domine. Elle peut mieux saisir différents modèles à différents niveaux de fréquence pour améliorer l’estimation des risques. Les mesures du risque, comme la volatilité et la VaR, peuvent être calculées directement à l’aide de modèles à ondelettes.

L’analyse par ondelettes est particulièrement utile lorsque l’horizon temporel a une incidence importante sur l’analyse des risques. Elle peut aider à peaufiner des hypothèses comme la volatilité, l’épaisseur de l’extrémité et la corrélation selon l’horizon temporel de l’analyse des risques.

Kailan Shang, FSA, AICA, CFA, PRM, SCJP, est directeur associé chez Aon PathWise Solutions Group, Canada. Vous pouvez le joindre à *kevin.shang@aon.com*.

REFERENCE

Percival, Donald B. et Andrew T. Walden. 2000. *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. New York: Cambridge University Press, pp. 159–180.